

# 三角形渠道共轭水深简化计算

梁雪梅<sup>1</sup>, 滕 凯<sup>2</sup>

(1. 黑龙江省水利工程建设监理公司, 黑龙江 哈尔滨 150000;  
2. 黑龙江省三江工程建设局, 黑龙江 哈尔滨 150900)

**摘 要:** 针对目前三角形断面共轭水深(完全水跃情况下)求解公式存在的计算过程繁复、误差大、适用范围有限等问题, 在对三角形断面共轭水深基本计算方程进行简化整理的基础上, 以共轭水深曲线线型分析为基础, 采用优化拟合技术, 通过对多组备选函数的拟合逼近, 获得了计算过程简捷、适用范围广的共轭水深简化计算公式。精度分析表明, 该公式求解三角形断面水跃跃前、跃后水深的最大相对误差分别为 0.168% 和 0.124%, 高于目前现有其他计算公式。

**关键词:** 三角形断面水跃; 共轭水深; 优化拟合; 简化计算

**中图分类号:** TV131.4    **文献标识码:** A    **文章编号:** 1008-0112(2017)11-0021-04

## 1 研究背景

研究三角形渠道完全水跃共轭水深的计算方法是有效简化其求解过程, 同时, 由于三角形断面又是介于梯形和矩形之间的断面形式, 开展三角形断面水跃共轭水深的研究也是为梯形断面水跃共轭水深研究提供基础工作。到目前为止, 有关学者已开展了大量的研究工作, Hager 等<sup>[1]</sup>通过模型试验对其共轭水深进行了验证; Vatankhab 等<sup>[2]</sup>通过对其水跃共轭水深求解方程的变形整理, 利用费拉里公式给出了共轭水深的解析解, 但由于涉及四次方程求解, 计算过程过于繁复; Rashwan<sup>[3]</sup>将三角形断面共轭水深计算通过近似显函数给出, 但因涉及中间变量参数的试算求解, 且公式形式比较复杂, 适用范围小, 精度差, 不便实际应用。为了提高三角形断面共轭水深的求解精度, 简化相关计算过程, 文献[4]通过利用 Matlab 软件对三角形断面无量纲共轭水深数值关系的拟合, 给出了该种断面共轭水深的近似计算式, 虽然该公式求解精度有所提高, 但因其表达形式为 2 个二次多项式之比, 计算过程仍显繁琐, 不便实际应用。为了进一步改进目前现有求解三角形断面共轭水深计算公式存在的问题, 本文在对三角形断面共轭水深计算公式简化整理的基础上, 通过对无量纲共轭水深关系曲线的特性分析, 经对多组备选函数的拟合比选, 提出了表达形式简单、求解精度高、适用范围广的简化计算

公式。

## 2 简化计算公式建立

### 2.1 基本计算公式

求解完全水跃共轭水深的基本方程为<sup>[5-6]</sup>:

$$\frac{Q^2}{gA_1} + A_1 h_{c1} = \frac{Q^2}{gA_2} + A_2 h_{c2} \quad (1)$$

式中  $Q$  为断面通过流量,  $m^3/s$ ;  $g$  为重力加速度, 一般取  $9.81 m/s^2$ ;  $A_1$ 、 $A_2$  分别为三角形过水断面跃前、跃后断面面积,  $m^2$ ;  $h_{c1}$ 、 $h_{c2}$  分别为跃前、跃后三角形过水断面形心点水深,  $m$ 。

对于三角形断面, 其水力要素具有如下关系:

$$\begin{cases} A_1 = mh_1^2 \\ A_2 = mh_2^2 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} h_{c1} = \frac{h_1}{3} \\ h_{c2} = \frac{h_2}{3} \end{cases} \quad (3)$$

$$h_k = \left( \frac{2Q^2}{gm^2} \right)^{0.2} \quad (4)$$

式中  $m$  为断面的边坡比;  $h_1$ 、 $h_2$  分别为跃前、跃后三角形过水断面水深,  $m$ ;  $h_k$  为三角形过水断面临界水深(假定动能修正系数  $\alpha = 1.0$ ),  $m$ 。

为了对式(1)进一步简化, 设:

收稿日期: 2017-08-04; 修回日期: 2017-09-18

基金项目: 齐齐哈尔市科技攻关项目(编号: SHFZGG201407)。

作者简介: 梁雪梅(1967), 女, 工程师, 主要从事工程建设管理研究。

$$\begin{cases} x = \frac{h_1}{h_k} \\ y = \frac{h_2}{h_k} \end{cases} \quad (5)$$

式中  $x$ 、 $y$  分别为跃前、跃后水深无量纲参数。

将式(2)至式(5)代入式(1), 经整理得:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{2}{3}x^3 = \frac{1}{y^2} + \frac{2}{3}y^3 \quad (6)$$

$$(0 < x < 1, 1 < y < \infty)$$

式(6)即为三角形断面共轭水深的基本求解方程, 利用该方程即可在已知  $h_1$  (或  $h_2$ ) 的情况下通过试算法求得  $h_2$  (或  $h_1$ )。

需说明的是, 因式(6)是利用完全水跃方程式(1)经整理推导获得, 所以式(6)不适用于淹没出流条件下的共轭水深计算。

## 2.2 简化计算公式

### 2.2.1 $y \sim x$ 关系曲线分析

为获得式(6)的最优拟合替代函数, 现完成  $y \sim x$  关系曲线绘制, 并对该曲线的特点进行分析。

在  $0 < x < 1$  的区间内, 选取任意  $x_i (i = 1, 2, \dots, N)$  即可利用式(6)通过试算或迭代法求得与其相对应的  $y_i$  值, 计算结果见表 1。

表 1  $y \sim x$  数值关系

$x$	1E-6	5E-6	1E-5	5E-5	1E-4	5E-4	1E-3
$y$	11 447.15	3 914.868	2 466.215	843.433	531.329	181.712	114.471 4
$x$	5E-3	1E-2	5E-2	1E-1	2E-1	3E-1	4E-1
$y$	39.148 7	24.662 1	8.434 2	5.312 7	3.343 4	2.543 9	2.087 4
$x$	5E-1	6E-1	7E-1	8E-1	9E-1	9.5E-1	9.9E-1
$y$	1.781 3	1.555 4	1.377 5	1.231 2	1.107 2	1.051 6	1.010 0

根据表 1 即可完成  $y \sim x$  曲线绘制, 见图 1 (考虑  $x$  的最小值为 1E-6,  $y$  的最大值为 11 447.15, 因此, 将坐标横、竖轴分别取为  $\ln x$  及  $\ln y$ )。

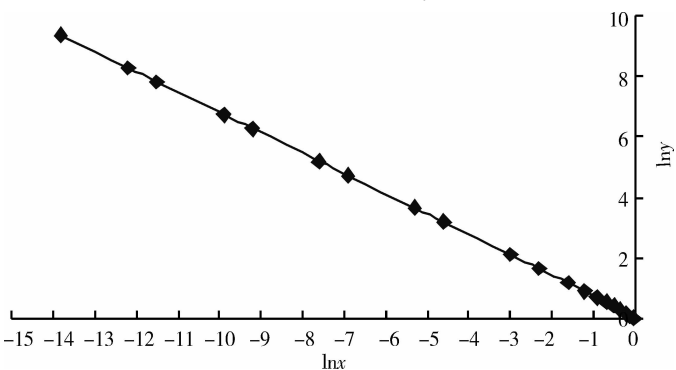


图 1  $\ln y \sim \ln x$  关系曲线

由图 1 可见, 在  $0 < x < 1$  的区间内,  $y$  值随  $x$  值的

增大呈非线性减小, 当  $x \rightarrow 1$  时 ( $\ln x \rightarrow 0$ ),  $y \rightarrow 1$  ( $\ln y \rightarrow 0$ ), 当  $x \rightarrow 0$  时 ( $\ln x \rightarrow -\infty$ ),  $y \rightarrow \infty$  ( $\ln y \rightarrow \infty$ ),  $y$  与  $x$  为反比例函数, 曲线类型为  $y$  关于  $x$  的负指数关系。

### 2.2.2 公式的建立

依据上述关于  $y \sim x$  关系曲线的特性分析, 初步拟定备选函数如下:

$$y = (ax^n + b)^{-m} \quad (7)$$

$$y = (ax^n + bx + c)^{-m} \quad (8)$$

$$y = (ax^{-n} + b)^m \quad (9)$$

$$y = (ax^{-2n} + bx^{-n} + c)^m \quad (10)$$

$$y = (ax^{-3n} + bx^{-n} + c)^m \quad (11)$$

式中  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $n$  及  $m$  均为通过优化拟合方法求得的系数及指数。

设  $S$  为标准剩余差,  $y'$  为理论计算值  $y$  的拟合替代值, 采用优化拟合的方法<sup>[7-9]</sup>, 以  $S$  最小为目标函数, 即:

$$S = \min \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y - y')^2}{N - 1}}$$

经逐次逼近计算可知, 式(10)为图 1 中  $y \sim x$  关系曲线的最优拟合替代式, 其最终拟合替代函数的表达式为:

$$y = (1.496 5x^{-2} + 0.149 6x^{-1} - 0.653)^{1/3} \quad (12)$$

当已知无量纲跃后水深参数  $y$ , 求无量纲跃前水深参数  $x$  时, 可由式(12)直接解得:

$$x = (\sqrt{0.668 4y^3 + 0.438 5} - 0.05)^{-1} \quad (13)$$

## 3 简化公式的比较及验证

### 3.1 通用性比较

利用式(12) (或(13))即可由已知的跃前水深 (或跃后水深) 直接求出跃后水深 (或跃前水深)。在公式的表达形式上, 本文公式较文献[2] ~ [4] 所给公式更加简化, 求解过程更直接; 在公式的适用范围上, 本文公式为  $0 < x < 1$ 、 $1 < y < \infty$ , 与解析解完全相同, 较文献[3, 4] (文献[3]的适用范围  $0.32 < x < 1$ 、 $1 < y < 2.43$ , 文献[4]的适用范围  $0.075 < x < 1$ 、 $1 < y < 6.43$ ) 具有更好的实用性。

### 3.2 计算精度比较

为便于分析本文公式的计算精度, 在式(6)中设:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{2}{3}x^3 = z \quad (14)$$

$$\text{或: } \frac{1}{y^2} + \frac{2}{3}y^3 = z \quad (15)$$

因  $0 < x < 1$ 、 $1 < y < \infty$ , 则  $0 < z < 0.6$ 。在  $0 < x <$

1 区间内选取不同的  $x_i$ , 即可利用式(14)求得与其相对应的  $z_i$ , 进而利用式(15)通过试算法求出  $y_i$ , 在将  $x_i$  代入式(12)求得  $y_i$  的替代值  $y'_i$ , 并由式(16)完成  $y'_i$  替代  $y_i$  的相对误差计算, 即为:

$$k_i = \frac{y_i - y'_i}{y_i} \times 100\% \quad (16)$$

式中  $k_i$  为计算值  $y'_i$  替代理论值  $y_i$  的相对误差, %。

取  $z$  为横坐标,  $k_i$  为纵坐标, 即可完成  $y'_i$  替代  $y_i$  的相对误差分布图绘制, 见图 2。采用与上述同样的方法也可完成当已知  $y_i$  利用式(13)求解  $x_i$  的相对误差计算及相对误差分布图绘制, 见图 2(考虑在绘图中, 当  $x = 1 \times 10^{-6}$  时,  $z = 1 \times 10^{-12}$ ,  $z$  值在横坐标轴上不便表示, 取  $\ln z$  为横坐标)。

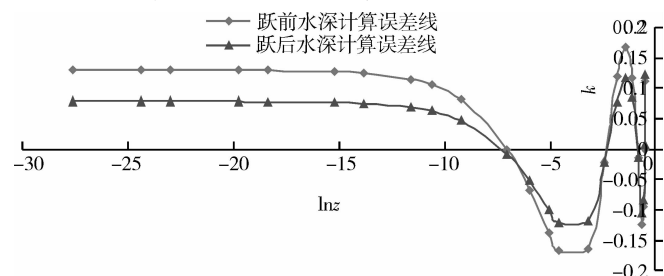


图 2 公式(12)、(13)计算误差分布曲线

由图 2 可见, 利用本文公式(12)或(13)求解跃后水深  $h_2$  或跃前  $h_1$  的最大相对误差分别为 0.124% 及 0.168%, 分别较计算精度较高的文献[4]所给公式求解结果最大相对误差(0.17% 和 0.2%)分别减小了 27% 和 16%, 本文公式具有较高的求解精度。

### 3.3 算例验证

选取文献[4]算例: 某三角形断面渠道上安装了一平板闸门, 当闸门在某一开度情况下, 闸下产生水跃, 已知  $Q = 20 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $h_1 = 0.6 \text{ m}$ ,  $m = 1.2$ , 试求  $h_2$ 。

解: 由式(4)得:

$$h_k = \left( \frac{2Q^2}{gm^2} \right)^{0.2} = 2.2419 \text{ m}$$

由式(5)求得:

$$x = \frac{h_1}{h_k} = 0.2676$$

将  $x = 0.2676$  代入式(12)得:

$$y = (1.4965x^{-2} + 0.1496x^{-1} - 0.653)^{1/3} = 2.7501$$

由此可求得跃后水深  $h_2$  为:

$$h_2 = yh_k = 6.1652 \text{ m}$$

根据式(6)通过试算可求得跃后水深  $h_2$  精确解为  $h_2 = 6.1623 \text{ m}$ , 本文公式计算结果的相对误差为 0.047%。

如已知  $h_2 = 6.1623 \text{ m}$ , 求跃前水深  $h_1$  时, 因  $y =$

$$\frac{h_2}{h_k} = 2.7487, \text{ 由式(13)可得:}$$

$$x = (\sqrt{0.6684y^3 + 0.4385} - 0.05)^{-1} = 0.2678$$

则  $h_1 = xh_k = 0.6003 \text{ m}$ , 与真值  $0.6 \text{ m}$  的相对误差为 0.05%。

## 4 结语

本文在全面分析现有三角形断面完全水跃共轭水深计算公式存在问题的基础上, 采用优化拟合的方法, 提出了该种断面水跃共轭水深的简化计算公式, 与现有计算公式比较, 具有以下优点:

1) 计算过程简捷。本文公式的表达形式简单、计算过程快捷, 便于实际应用。

2) 应用范围广。本文公式无量纲跃前、跃后参数的适用范围为  $0 < x < 1$ 、 $1 < y < \infty$ , 而文献[3, 4]所给公式参数的适用区间分别为  $0.32 < x < 1$ 、 $1 < y < 2.43$  及  $0.075 < x < 1$ 、 $1 < y < 6.43$ 。因此, 本文公式具有更好的适用范围。

3) 计算精度高。本文公式计算跃前、跃后水深的最大相对误差分别为 0.168% 及 0.124%, 均小于现有公式的计算误差。

本文及现有关于三角形断面共轭水深计算公式的研究均为完全水跃条件, 而当水跃为淹没出流时, 其跃后水深直接受下游尾水深度影响, 该水跃已不属于完全水跃, 本文公式不适用。

### 参考文献:

- [1] Hager W H, Wanoschek R. Hydraulic jump in triangular channel[J]. Journal of Hydraulic Research, 1987, 25(5): 349-365.
- [2] Vatankhah A R, Omid M H. Direct solution to problems of hydraulic jump in horizontal triangular channels[J]. Applied Mathematics Letters, 2010(23): 1104-1108.
- [3] Rashwan I M H. Analytical solution to problems of hydraulic jump in horizontal triangular channels[J]. Ain Shams Engineering Journal, 2013(4): 365-368.
- [4] 赵延风, 王羿, 王正中. 三角形明渠水跃共轭水深的近似解法[J]. 西北农林科技大学学报(自然科学版), 2017, 45(4): 230-234.
- [5] 吴持恭. 水力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1979.
- [6] 吕宏兴, 裴国霞, 杨玲霞. 水力学[M]. 北京: 中国农业出版社, 2002.
- [7] 滕凯. 标准 U 形断面渠槽收缩水深简化计算[J]. 广东水利水电, 2014(7): 37-39.

- [8] 王慧文. 偏最小二乘回归法及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 1999.
- [9] 阎凤文. 测量数据处理方法[M]. 北京: 原子能出版社, 1988.

(本文责任编辑 马克俊)

## Simplified Calculation of Conjugate Depth of Triangular Channel

LIANG Xuemei<sup>1</sup>, TENG Kai<sup>2</sup>

- (1. Heilongjiang Hydraulic Engineering Construction Supervision Company;  
2. Heilongjiang Sanjiang Engineering Construction Bureau, Harbin 150000, China)

**Abstract:** In view of the present solution formulas of conjugate water depth of triangle section of the great error in the process of heavy and complicated, and limited application scope, based on the simplified consolidation and the linear conjugate water depth curve analysis, the optimum fitting technology, through the fitting of multiple sets of optional function approximation, the calculation process is simple and applicable range of the simplified calculation formula. The accuracy analysis shows that the maximum relative error of the formula is 0.168% and 0.124% respectively, which is higher than the current calculation formula.

**Keywords:** triangular section water jump; conjugate depth; optimize fitting; simplified calculation

(上接第20页)

- [3] 杨书娟. 基于系统动力学的水资源承载力模拟研究——以贵州省为例[D]. 贵阳: 贵州师范大学, 2005.
- [4] 成洪山. 广州市水资源可持续利用的系统动力学研究[D]. 广州: 华南师范大学, 2007.
- [5] 王银平. 天津市水资源系统动力学模型的研究[D]. 天津: 天津大学, 2007.
- [6] 李旭. 社会系统动力学: 政策研究的原理、方法和应用[M]. 上海: 复旦大学出版社, 2009.

(本文责任编辑 王瑞兰)

## Simulation of Water Resource Carrying Capacity Based on System Dynamics Model

ZHAO Bikui<sup>1</sup>, DU Huanhuan<sup>1</sup>, QIU Jing<sup>1</sup>, LI Chuangang<sup>2</sup>

- (1. Guangdong Research Institute of Water Resources and Hydropower, Guangdong Key Laboratory of Hydrodynamic Research, National and Local Joint Engineering Laboratory of Estuarine water technology, Guangzhou 510635, China;  
2. College of Renewable Energy, North China Electric Power University, Beijing 102206, China)

**Abstract:** Based on the system dynamic theory, a simulation model of water resource carrying capacity is built to match up the sustainable development of economy society. Combining with the development goals of the region, the model can simulate the water resource carrying capacity simulation. With a case study of a City in north of Guangdong Province, the water resource carrying capacity simulation is used during the period of “13th Five-Year” Plan, and the sensitive factor of the water resource carrying capacity is analyzed by the means of sensitive analysis. At last, some suggestions are put forward for the future development and utilization of water resources in the city.

**Keywords:** system dynamic; water resource carrying capacity; sustainable development